

## О Т З Ы В

научного руководителя Зайцева Валентина Федоровича  
о диссертации Хоанг Нгы Хуана  
“Симметрия уравнений нечётных порядков”,  
представленной в диссертационный Совет Д 212.038.22  
при Воронежском государственном университете  
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление.

Диссертационная работа Хоанг Нгы Хуана относится к классическому направлению современного группового анализа – групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) заданного порядка. Однако имеется и существенное отличие, связанное прежде всего с постановкой задачи. Если в классической постановке ставится обычно **прямая задача** – поиск группы, допускаемой заданным уравнением или заданным классом уравнений, то в современной постановке на первый план выходит **обратная задача** – поиск наиболее широкого класса уравнений, допускающих оператор заданного вида. Такая постановка обусловлена в первую очередь потребностями математического моделирования – для большей адекватности модели требуется сохранение априорной симметрии, и решение обратной задачи сужает класс модельных дифференциальных уравнений до приемлемого минимума.

При этом может быть задана не только лиевская симметрия, но и закон сохранения (первый интеграл). Заметим, что до сих пор в литературе нет полного описания даже точечных симметрий уравнений 3-го порядка, не говоря уже о высших симметриях и первых интегралах. Во многом это объясняется высокой трудоёмкостью реализации алгоритмов группового анализа для ОДУ нечётных порядков, в частности, третьего. Особенно заметно это проявляется при поиске первых интегралов – для нечётных порядков уравнений нётеровских симметрий не существует, и формальное распространение на эти уравнения гамильтонова формализма не дает никаких практических результатов (С. П. Царев).

Тем не менее, к ОДУ 3-го порядка приводятся многочисленные модельные уравнения математической физики, в первую очередь необходимо отметить систему уравнений Навье–Стокса – при различных исходных предположениях автомодельные решения удовлетворяют различным уравнениям рассматриваемого класса, среди которых видное место занимают уравнения пограничного слоя. К тому же классу уравнений приводится и задача поиска солитонных решений уравнения Кортевега–де Фриза и его модификаций. Известно также, что можно указать ряд

весьма простых уравнений, обладающих симметрией, аналогичной вариационной. В своей диссертационной работе П. П. Аврашков указал несколько нетривиальных подклассов уравнений такого типа.

Поэтому перед диссертантом была поставлена задача поиска максимально широких классов уравнений 3-го порядка, имеющих априорную точечную симметрию, “наследуемую” первым интегралом заданной структуры. Основная сложность заключается в том, что для решения этой задачи необходимо совместно решить три определяющих системы уравнений: условие инвариантности исходного класса уравнений относительно некоторой (пока неизвестной) точечной симметрии, условие существования первого интеграла заданной структуры и условие инвариантности этого первого интеграла относительно той же точечной симметрии.

В первой главе приводятся необходимые сведения об основных методах группового анализа и подробно излагается метод операторов Эйлера высших порядков для поиска первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во второй главе поставленная задача решается для класса уравнений без “предстаршей” производной  $y''' = F(x, y, y')$ . Следует отметить, что автор диссертации применил два очень выигрышных приёма, которые, несомненно, способствовали успешному решению задачи: 1) вместо метода операторов Эйлера высших порядков использовался “прямой” метод как менее трудоёмкий, и 2) вместо анализа общего класса уравнений проводился анализ автономного подкласса. Второй приём оказался наиболее плодотворным: вместо совместного решения трёх сложных систем решалась только одна, причём более простая (число независимых переменных стало меньше на единицу). В силу принципа подобия точечных групп общий результат легко получается действием группы эквивалентности на полученный автономный подкласс.

Поэтому в начале второй главы диссертант находит группы эквивалентности для всех изучаемых в диссертации подклассов уравнений (заметим, что общий класс обратимых точечных преобразований также порождает обширный подкласс уравнений рассматриваемого порядка общего типа, т. е. не сохраняющих структуру зависимости по производным). Далее находятся подклассы уравнений, имеющие линейный, квадратичный или кубичный автономный первый интеграл.

В третьей главе рассматривается аналогичная задача для уравнений вида  $y''' = F(x, y, y'')$ . Заметим, что ранее уравнения такого типа “в целом” вообще не рассматривались, имеющиеся результаты носят отрывочный характер и касаются интегрируемости в замкнутом виде отдельных уравнений, впрочем, весьма интересных для приложений.

Полученные результаты являются максимальными и описывают

все уравнения заданного типа, имеющие аналог вариационной симметрии (с точностью до точечной группы эквивалентности). В целом работа производит хорошее впечатление – как по владению аппаратом группового анализа, так и по весомости результатов – и выглядит вполне законченной. Апробированные в работе методы и приёмы достаточно универсальны, и могут применяться при решении аналогичных задач для других классов уравнений и систем (без ограничения порядка).

За время обучения в аспирантуре Хоанг Нгы Хуан показал себя грамотным профессионалом, способным самостоятельно ставить и решать актуальные задачи симметричной теории дифференциальных уравнений. Ряд результатов диссертанта используется для подготовки фундаментальных справочников по обыкновенным дифференциальным уравнениям (в России и в США), а также в нескольких учебных пособиях. Это подтверждает безусловную ценность работы и стимулирует дальнейшее расширение базы модельных уравнений, решения которых могут быть записаны в аналитической замкнутой форме. Более того, полученные результаты свидетельствуют о том, что симметричный анализ обыкновенных дифференциальных уравнений весьма далёк от завершения. Во всяком случае, аналогия с нётеровыми симметриями заслуживает самого пристального внимания, в том числе и специалистов прикладных областей.

Считаю, что диссертационная работа Хоанг Нгы Хуана соответствует требованиям Положения, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Профессор кафедры математического анализа  
РГПУ им. А. И. Герцена (Санкт-Петербург),  
д. ф.-м. н.

В. Ф. Зайцев

РГПУ им. А.И. Герцена  
подпись *В.Ф. Зайцев*  
удостоверяю « 17 ФЕВ 2014 »  
Отдел персонала  
управления кадров и социальной работы

В.В. Рубинчик